Лекция 4

Первые интегралы системы ОДУ

Первые интегралы автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений

Будем рассматривать автономные системы вида

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}\,(\vec{x}), \qquad \vec{x} \in D \subset \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

$\vec{f}\,(\vec{x}) = \big(f_1\,(\vec{x}),\ \ldots,\ f_n\,(\vec{x})\big) \in C^1(D)$.

Опр. 1. Первым интегралом системы (1) будем называть функцию $u\,(\vec{x}) \in C^1(D)$ такую, что:

1) $u\,(\vec{x}) \not\equiv \mathrm{const}$ ни в какой подобласти области D.

2) Для любого решения $\vec{x} = \vec{\varphi}(t) \equiv \big(\varphi_1(t),\ \ldots,\ \varphi_n(t)\big)$ системы (1) $u\,(\vec{\varphi}(t)) \equiv \mathrm{const}$.

Замечание 1. Иногда первым интегралом называют не функцию $u\,(\vec{x})$, а соотношение $u\,(\vec{x}) = c$; это бывает удобно при практическом решении систем.

Пример 1. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1; \\ \dot{x}_2 = 2x_2. \end{cases}$$

Тогда решение этой системы представляется в виде $x_1 = c_1 e^t$, $x_2 = c_2 e^{2t}$.

Покажем, что функция $u(x_1,\ x_2) = \frac{x_1^2}{x_2}$ является первым интегралом рассматриваемой системы, например, в области $\{(x_1,\ x_2):\ \ x_1 > 0,\ \ x_2 > 0\}$

Действительно, $u(x_1,\ x_2) \not\equiv \mathrm{const}$ ни в какой подобласти, но если взять решение системы $x_1 = c_1 e^t$, $x_2 = c_2 e^{2t}$, то $u\big(x_1(t),\ x_2(t)\big) = \frac{c_1^2}{c_2} \equiv \mathrm{const}$.

В дальнейшем нам понадобится понятие (функциональной) зависимости функций, которое вводится в курсе математического анализа. Напомним его.

Опр. 2. Пусть D область в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим функции $u_1\,(\vec{x}), \ldots, u_k\,(\vec{x}) \in C^1(D)$. Пусть j один из номеров $1,\ \ldots,\ k$.

Скажем, что **функция** $u_j\,(\vec{x})$ **зависима от функций** $u_1\,(\vec{x}), \ldots, u_{j-1}\,(\vec{x}), u_{j+1}\,(\vec{x}), \ldots, u_k\,(\vec{x})$, если $\exists$ функция $\varphi(y_1,\ \ldots,\ y_{k-1})$ класса C^1 такая, что

$$u_j\,(\vec{x}) = \varphi\big(u_1\,(\vec{x}),\ \ldots,\ u_{j-1}\,(\vec{x}),\ u_{j+1}\,(\vec{x}),\ \ldots,\ u_k\,(\vec{x})\big), \qquad \forall\, x \in D.$$

Система функций $u_1(\vec{x}), \ldots, u_k(\vec{x})$ называется в этом случае **зависимой на множестве** D.

В противном случае эта система называется **независимой**.

В курсе математического анализа доказываются следующие утверждения, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Утверждение 1. *Пусть* $2 \leqslant k \leqslant n$.

Система функций $u_1(\vec{x}), \ldots, u_k(\vec{x})$ *является зависимой в* D, *тогда и только тогда, когда ранг матрицы Якоби*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1(\vec{x})}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial u_1(\vec{x})}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial u_k(\vec{x})}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial u_k(\vec{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

меньше k *в каждой точке* $\vec{x} \in D$.

Утверждение 2. *Пусть* $1 \leqslant p < k \leqslant n$. *Рассмотрим в* D *систему функций* $u_1(\vec{x}), \ldots, u_k(\vec{x})$. *Предположим, что* $\forall\, \vec{x} \in D$ *ранг матрицы Якоби*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1(\vec{x})}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial u_1(\vec{x})}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial u_k(\vec{x})}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial u_k(\vec{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

равен $p < k$, *и существует* $\vec{x}^0 \in D$ *такая, что Якобиан*

$$\left.\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1(\vec{x})}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial u_1(\vec{x})}{\partial x_p} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial u_p(\vec{x})}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial u_p(\vec{x})}{\partial x_p} \end{vmatrix}\right|_{\vec{x}=\vec{x}^0} \neq 0.$$

Тогда существует окрестность $\mathrm{U}(\vec{x}^0) \subset D$ *такая, что система функций* $u_1(\vec{x}), \ldots, u_p(\vec{x})$ *не является зависимой в* $\mathrm{U}(\vec{x}^0)$, *и в то же время функции* $u_{p+1}(\vec{x}), \ldots, u_k(\vec{x})$ *являются зависимыми от функций* $u_1(\vec{x}), \ldots, u_p(\vec{x})$ *в* $\mathrm{U}(\vec{x}^0)$.

Замечание 2. Если функции $u_1(\vec{x}), \ldots, u_k(\vec{x})$ линейно зависимы на D, то они, очевидно, и функционально зависимы на D.

Действительно, если $u_1(\vec{x}), \ldots, u_k(\vec{x})$ линейно зависимы, то существует номер j и числа $c_1, \ldots, c_{j-1}, c_{j+1}, \ldots, c_k$ такие, что

$$u_j(\vec{x}) = c_1 u_1(\vec{x}) + \ldots + c_{j-1} u_{j-1}(\vec{x}) + c_{j+1} u_{j+1}(\vec{x}) + \ldots + c_k u_k(\vec{x}).$$

Следовательно, в качестве функции $\varphi(\vec{y})$ в определении 1 достаточно взять

$$\varphi = c_1 y_1 + \ldots + c_{j-1} y_{j-1} + c_{j+1} y_{j+1} + \ldots + c_k y_k \in C^1.$$

Обратное утверждение неверно.

Например, функции $u_1(x) = \sin x$, $u_2(x) = \cos x$ зависимы на $(0, \pi)$, поскольку $\sin x = (1 - \cos^2 x)^{\frac{1}{2}}$, но, очевидно, эти функции не являются линейно зависимыми.

Приведем без доказательства теорему о существовании системы из $(n-1)$ независимого первого интеграла.

Теорема 1.
Пусть дана система (1), *где* $\vec{f}(\vec{x}) \in C^1(D)$ *и точка* $\vec{a} \in D$ *не является положением равновесия этой системы, т.е.* $\vec{f}(\vec{a}) \neq \vec{0}$.

Тогда в некоторой окрестности точки $\vec{a}$ *существует система из* $(n-1)$ *независимых первых интегралов* $u_1(\vec{x}), \ldots, u_{n-1}(\vec{x})$.

Следующая теорема дает ответ на вопрос о необходимом и достаточном условии, при котором некоторая функция $u(\vec{x})$ является первым интегралом системы (1).

Теорема 2 (критерий первого интеграла)**.**
Пусть дана автономная система (1). *Пусть функция* $u(\vec{x}) \in C^1(D)$ *такова, что* $u(\vec{x}) \not\equiv \mathrm{const}$ *ни в какой подобласти области* D.

Тогда справедливо утверждение:

$u(\vec{x})$ – *первый интеграл системы* (1) *тогда и только тогда, когда*

$$\left(\operatorname{grad} u(\vec{x}),\ \vec{f}(x)\right) = 0 \qquad \text{в } D.$$

Доказательство.
Пусть $\vec{x}(t)$ произвольное решение системы (1). Тогда

$$\frac{du\left(\vec{x}(t)\right)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u\left(\vec{x}\right)}{\partial x_i} \cdot \dot{x}_i(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u\left(\vec{x}\right)}{\partial x_i} \cdot f_i\left(\vec{x}\right) \equiv \Big(\operatorname{grad} u\left(\vec{x}\right),\ f(x)\Big). \quad (2)$$

- Если $u\left(\vec{x}\right)$ первый интеграл системы (1), то $u\left(\vec{x}(t)\right) \equiv \mathrm{const}$ и левая часть равенства (2) равна нулю. Следовательно, обращается в нуль и правая часть (2).
- Если же $\Big(\operatorname{grad} u\left(\vec{x}\right),\ f(x)\Big) = 0$, то обращается в нуль и левая часть (2): $\frac{du(\vec{x}(t))}{dt} = 0$, а значит $u\left(\vec{x}(t)\right) \equiv \mathrm{const}$ на любом решении $\vec{x}(t)$ системы (1), откуда следует, что $u\left(\vec{x}\right)$ первый интеграл системы (1).

□

Следствие. $u\left(\vec{x}\right)$ – *первый интеграл системы обыкновенных дифференциальных уравнений* (1) *тогда и только тогда, когда* $u\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ – *решение следующего линейного уравнения в частных производных первого порядка:*

$$f_1\left(\vec{x}\right) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + f_n\left(\vec{x}\right) \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0. \quad (3)$$

Докажем несколько полезных свойств первых интегралов системы (1).

Теорема 3.
Пусть $u_1\left(\vec{x}\right), \ \ldots, \ u_k\left(\vec{x}\right)$ – *первые интегралы системы* (1). *Пусть* $\Phi\left(y_1, \ \ldots, \ y_k\right)$ – *функция класса* C^1.

Рассмотрим сложную функцию $u\left(\vec{x}\right) = \Phi\big(u_1\left(\vec{x}\right), \ \ldots, \ u_k\left(\vec{x}\right)\big)$. *Пусть* $u\left(\vec{x}\right) \not\equiv \mathrm{const}$ *ни в какой подобласти области* D.

Тогда $u\left(\vec{x}\right)$ – *тоже первый интеграл системы* (1).

Доказательство. Поскольку $u_1\left(\vec{x}\right), \ \ldots, \ u_k\left(\vec{x}\right)$ первые интегралы системы (1), то на любом решении $\vec{x}(t)$ системы (1) они обращаются в константы:

$$u_1\left(\vec{x}(t)\right) = c_1, \ \ldots, \ u_k\left(\vec{x}(t)\right) = c_k.$$

Тогда и

$$u\left(\vec{x}(t)\right) = \Phi\left(u_1\left(\vec{x}(t)\right), \ \ldots, \ u_k\left(\vec{x}(t)\right)\right) = \Phi\big(c_1, \ \ldots, \ c_k\big) \equiv \mathrm{const},$$

что по определению и означает, что $u\left(\vec{x}\right)$ первый интеграл системы (1).
□

Следствие. *Система (1) в окрестности любой точки имеет бесконечно много первых интегралов.*

Теорема 4.
Рассмотрим систему (1). Пусть точка $\vec{a}$ не является положением равновесия этой системы. Пусть $u_1(\vec{x}), \ldots, u_{n-1}(\vec{x})$ – $(n-1)$ независимых первых интегралов системы (1) в окрестности точки $\vec{a}$ (их существование гарантировано теоремой 1). Пусть $u(\vec{x})$ – еще один первый интеграл системы (1) в окрестности точки $\vec{a}$.

Тогда в этой окрестности $u(\vec{x})$ является зависимой функцией от $u_1(\vec{x}), \ldots, u_{n-1}(\vec{x})$.

Доказательство. В силу теоремы 2 имеем в окрестности точки $\vec{a}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} f_1 + \ldots + \frac{\partial u_1}{\partial x_n} f_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1} f_1 + \ldots + \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_n} f_n = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x_1} f_1 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} f_n = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Положим $\vec{x} = \vec{a}$. Тогда система (4) представляет собой однородную СЛАУ n-го порядка относительно $f_1, \ldots, f_n$, которая имеет ненулевое решение $\{f_1(a), \ldots, f_n(a)\}$. Следовательно, определитель этой системы равен нулю. Но этот определитель представляет собой Якобиан

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial u}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Значит в силу утверждения 1 данного параграфа система функций $u_1(\vec{x}), \ldots, u_{n-1}(\vec{x}), u(\vec{x})$ является зависимой в некоторой окрестности точки $\vec{a}$.

В то же время, функции $u_1(\vec{x}), \ldots, u_{n-1}(\vec{x})$ не являются зависимыми, поэтому в силу того же утверждения 1 ранг матрицы

$$\left.\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial u}{\partial x_n} \end{pmatrix}\right|_{x=a}$$

равен $n-1$, а следовательно, один из миноров $(n-1)$-го порядка этой матрицы не равен нулю.

Применяя утверждение 2, получаем, что функция $u(\vec{x})$ является зависимой от функций $u_1(\vec{x}), \ldots, u_{n-1}(\vec{x})$ в некоторой окрестности точки $\vec{a}$. □

Следствие. *Если $\vec{a}$ не является положением равновесия автономной системы (1), то в окрестности этой точки существует ровно $(n-1)$ независимых первых интегралов, а любая система из n первых интегралов функционально зависима.*

Теорема 5.
Если для системы (1) в окрестности точки $\vec{a}$ найдено k независимых первых интегралов, то в окрестности этой точки порядок системы понижается на k единиц.

Доказательство. Пусть $u_1(\vec{x}), \ldots, u_k(\vec{x})$ $(k \leqslant n-1)$ независимые первые интегралы системы (1). Тогда согласно утверждению 1 матрица Якоби

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ \frac{\partial u_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_k}{\partial x_n} \end{pmatrix} \qquad \text{имеет ранг } k.$$

Переобозначая переменные, можно считать, что

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_k} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ \frac{\partial u_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \end{pmatrix} \neq 0 \qquad \text{в окрестности точки } a. \tag{5}$$

Рассмотрим решение $\vec{x}$ системы (1), проходящее через точку $\vec{a}$. Тогда

$$\begin{cases} u_1(x_1, \ldots, x_n) \equiv c_1, \\ \ldots\ldots\ldots \\ u_k(x_1, \ldots, x_n) \equiv c_k \end{cases} \tag{6}$$

на этом решении, в том числе и в точке $\vec{a}$.

В силу условия (5) к системе (6) можно применить теорему о неявной функции, по которой в окрестности точки $\vec{a}$ переменные $x_1, \ldots, x_k$ можно выразить через остальные:

$$\begin{cases} x_1 = w_1(x_{k+1}, \ldots, x_n, c_1, \ldots, c_k), \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_k = w_k(x_{k+1}, \ldots, x_n, c_1, \ldots, c_k). \end{cases}$$

Тогда систему (1) можно переписать в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_{k+1} = f_{k+1}\Big(w_1\left(x_{k+1},\ \ldots,\ x_n,\ c_1,\ \ldots,\ c_k\right),\ \ldots, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad w_k\left(x_{k+1},\ \ldots,\ x_n,\ c_1,\ \ldots,\ c_k\right),\ x_{k+1},\ \ldots,\ x_n\Big) \\ \ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n = f_n\Big(w_1\left(x_{k+1},\ \ldots,\ x_n,\ c_1,\ \ldots,\ c_k\right),\ \ldots, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad w_k\left(x_{k+1},\ \ldots,\ x_n,\ c_1,\ \ldots,\ c_k\right),\ x_{k+1},\ \ldots,\ x_n\Big), \end{cases}$$

т.е. порядок системы понизился на k единиц. □

Замечание 3. Если $k = n - 1$, то в теореме 5 получаем уравнение

$$\dot{x}_n = f_n\Big(w_1\left(x_n,\ c_1,\ \ldots,\ c_{n-1}\right),\ \ldots,\ w_{n-1}\left(x_n,\ c_1,\ \ldots,\ c_{n-1}\right),\ x_n\Big).$$

Это уравнение с разделяющимися переменными, которое легко решается.

Таким образом, нахождение $n - 1$ независимого первого интеграла позволяет полностью решить систему (1) в окрестности неособой точки.

Неавтономные системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим теперь общую систему уравнений первого порядка

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x},\ t), \qquad (\vec{x},\ t) \in G \equiv D \times [0,\ T), \quad D \subset \mathbb{R}^n, \tag{7}$$

$\vec{f}(\vec{x},\ t) = \left(f_1(\vec{x},\ t),\ \ldots,\ f_n(\vec{x},\ t)\right), \quad f_i \in C^1(G).$

В развернутом виде система (7) запишется следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1\left(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ t\right), \\ \ldots\ldots\ldots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n\left(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ t\right). \end{cases}$$

Это система n-го порядка. Сведем ее к автономной системе $(n + 1)$-го порядка.

Для этого введем еще одну переменную $x_{n+1} = t$. Тогда систему (7) можно, очевидно, записать в виде

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1\left(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ x_{n+1}\right), \\ \ldots\ldots\ldots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n\left(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ x_{n+1}\right), \\ \frac{dx_{n+1}}{dt} = 1 \left(\equiv f_{n+1}\left(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ x_{n+1}\right).\right) \end{cases} \tag{8}$$

Система (8) это автономная система $(n+1)$-го порядка. Но тогда для системы (8), а значит, и для исходной системы (7), можно ввести понятие первого интеграла, причем будут справедливы доказанные в § 1 свойства.

Замечание 4. Отметим, что $f_{n+1} \equiv 1$, поэтому у системы (8) нет точек равновесия.

Опр. 3. Функция $u(\vec{x},\ t)$ называется **первым интегралом системы** (7), если

1) $u(\vec{x},\ t) \not\equiv \mathrm{const}$ ни в какой подобласти области G.

2) Для любой интегральной кривой $\vec{x} = \vec{x}(t)$ решения системы (7)

$$u\big(x_1(t),\ \ldots,\ x_n(t),\ t\big) \equiv c, \qquad \forall\, t \in [0,\ T).$$

Теорема 6.
Если $f(\vec{x},\ t) \in C^1(G)$, то в окрестности любой точки из G существует система из n независимых первых интегралов системы (7).

Доказательство. Как было показано выше, система (7) сводится к автономной системе $(n+1)$-го порядка, причем в силу замечания 4. для этой системы каждая $(\vec{x},\ t) \in G$ не является положением равновесия. Поэтому утверждение теоремы следует из теоремы 1. □

Теорема 7.

Пусть $u(\vec{x},\ t) \in C^1(G)$ и $u(\vec{x},\ t) \not\equiv \mathrm{const}$ ни в какой подобласти области G. Тогда $u(\vec{x},\ t)$ является первым интегралом системы (7) тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x_1} f_1(\vec{x},\ t) + \ \ldots\ + \frac{\partial u}{\partial x_n} f_n(\vec{x},\ t) = 0$$

в области G.

Доказательство. Сразу следует из теоремы 2. В самом деле, так как $f_{n+1} \equiv 1$, то по теореме 2 тот факт, что $u(\vec{x},\ t)$ первый интеграл системы, равносилен уравнению в частных производных

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} f_1(\vec{x},\ t) + \ \ldots\ + \frac{\partial u}{\partial x_n} f_n(\vec{x},\ t) + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x_{n+1}}}_{\equiv \frac{\partial u}{\partial t}} \underbrace{f_{n+1}(\vec{x},\ t)}_{\equiv 1} = 0.$$

Следствие. $u(x_1, \ldots, x_n, t) \in C^1(G)$ – *первый интеграл системы* (7) *тогда и только тогда, когда функция* $u(x_1, \ldots, x_n, t)$ – *решение следующего уравнения в частных производных первого порядка:*

$$u_t + f_1(\vec{x}, t)u_{x_1} + \ldots + f_n(\vec{x}, t)u_{x_n} = 0. \tag{9}$$

Симметричная запись систем ОДУ первого порядка

Система (7) может быть переписана в виде

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{f_1\left(x_1, \ldots, x_n, t\right)} = \frac{dt}{1}, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \frac{dx_n}{f_n\left(x_1, \ldots, x_n, t\right)} = \frac{dt}{1}. \end{cases} \tag{10}$$

Равенства (10) понимаются как пропорции, т.е. если $f_i(x_1, \ldots, x_n, t) = 0$, то считается, что и $dx_i = 0$, а соответствующее отношение равно dt.

Учитывая примененный в § 2 прием по введению новой переменной $x_{n+1} = t$, систему (10) можно записать в виде

$$\frac{dx_1}{f_1(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})} = \ldots = \frac{dx_n}{f_n(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})} = \frac{dx_{n+1}}{1}. \tag{11}$$

Систему (11) можно, очевидно, умножать на любую не равную нулю функцию, и в результате мы придем к системе

$$\frac{dx_1}{\tilde{f}_1(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})} = \ldots = \frac{dx_n}{\tilde{f}_n(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})} = \frac{dx_{n+1}}{\tilde{f}_{n+1}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})}. \tag{12}$$

Опр. 4. Запись (12) называют **записью системы** (7) **в симметричной форме**. При этом предполагается, что хотя бы одна из функций $\tilde{f}_i(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$, $i = 1, \ldots, n, n+1$ не равна нулю.

Рассмотрим автономную систему (1). Будем считать, что $f(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$ в окрестности некоторой точки $\vec{a}$.

Симметричная запись системы (1) будет иметь вид

$$\frac{dx_1}{f_1(x_1, \ldots, x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{f_n(x_1, \ldots, x_n)} = \frac{dt}{1}. \tag{13}$$

В системе (13) n равенств. Но при этом первые $(n-1)$ равенств образуют замкнутую систему уравнений (учтем, что $f(\vec{x}) \neq 0$ в окрестности точки $\vec{a}$).

Поэтому автономной системе (1) соответствует еще одна симметричная запись

$$\frac{dx_1}{f_1(x_1,\ \ldots,\ x_n)} = \ \ldots\ = \frac{dx_n}{f_n(x_1,\ \ldots,\ x_n)}, \tag{14}$$

где в качестве независимой переменной можно взять ту x_i, для которой $f_i(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$.

Замечание 5. Если дана система в симметричной форме (14) и $\vec{f}(\vec{x}) \equiv \big(f_1(\vec{x}),\ \ldots,\ f_n(\vec{x})\big) \neq 0$ в окрестности некоторой точки $\vec{a}$, то эту систему можно рассматривать в двух видах:

1) свести ее к автономной системе (1);

2) выбрать одну из переменных за независимую (а именно ту x_i, для которой $f_i(\vec{x}) \neq 0$), получить неавтономную систему в виде

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dx_i} = \dfrac{f_1(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n)}{f_i(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n)}, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_{i-1}}{dx_i} = \dfrac{f_{i-1}(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n)}{f_i(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n)}, \\ \dfrac{dx_{i+1}}{dx_i} = \dfrac{f_{i+1}(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n)}{f_i(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n)}, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n}{dx_i} = \dfrac{f_n(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n)}{f_i(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n)}. \end{cases}$$

Пример 2. Рассмотрим систему в симметричной форме

$$\frac{dx_1}{x_1x_2} = \frac{dx_2}{x_2^2} = \frac{dx_3}{x_2(x_3+1)} \tag{15}$$

в окрестности точки $a \equiv \big(a_1,\ a_2,\ a_3\big)$, $a_2 \neq 0$.

Если мы воспользуемся первым способом, то будем рассматривать автономную систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1x_2, \\ \dot{x}_2 = x_2^2, \\ \dot{x}_3 = x_2(x_3+1). \end{cases} \tag{16}$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx_1}{dx_i} = \dfrac{f_1(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)}{f_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)}, \\
\ldots\ldots\ldots \\
\dfrac{dx_{i-1}}{dx_i} = \dfrac{f_{i-1}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)}{f_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)}, \\
\dfrac{dx_{i+1}}{dx_i} = \dfrac{f_{i+1}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)}{f_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)}, \\
\ldots\ldots\ldots \\
\dfrac{dx_n}{dx_i} = \dfrac{f_n(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)}{f_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)}.
\end{cases}
$$

Пример 2. Рассмотрим систему в симметричной форме

$$
\frac{dx_1}{x_1 x_2} = \frac{dx_2}{x_2^2} = \frac{dx_3}{x_2\,(x_3+1)} \tag{15}
$$

в окрестности точки $a \equiv \big(a_1,\ a_2,\ a_3\big),\ \ a_2 \neq 0.$

Если мы воспользуемся первым способом, то будем рассматривать автономную систему

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = x_1 x_2, \\
\dot{x}_2 = x_2^2, \\
\dot{x}_3 = x_2\,(x_3+1)\,.
\end{cases} \tag{16}
$$

Для системы (16) нетрудно получить два независимых первых интеграла. Действительно, первое соотношение в (15) дает

$$
\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2}, \qquad \text{откуда} \quad \ln\big|x_1\big| = \ln\big|x_2\big| + c_1
$$

и мы получаем первый интеграл в виде

$$
\frac{x_1}{x_2} = c_1.
$$

Второе соотношение в (15) дает

$$
\frac{dx_2}{x_2} = \frac{dx_3}{x_3+1}, \qquad \text{откуда алалогично}
$$

получаем еще один первый интеграл

$$
\frac{x_3+1}{x_2} = c_2.
$$

Найденные первые интегралы, очевидно, независимы, поскольку в первый из них не входи x_3, а во второй x_1.

Теперь в соответствии с замечанием 3. нетрудно получить и общее решение системы (16). Действительно, из второго уравнения имеем $\frac{dx_2}{dt} = x_2^2$, следовательно, $\frac{dx_2}{x_2^2} = dt$, откуда $x_2 = \frac{1}{c_3 - t}$.

Таким образом, получаем решение системы (16) в виде

$$x_1 = \frac{c_1}{c_3 - t}, \qquad x_2 = \frac{1}{c_3 - t}, \qquad x_3 = \frac{1}{c_3 - t} - 1.$$

Фазовыми же траекториями будут линии

$$\begin{cases} x_1 = c_1 x_2, \\ x_3 = \frac{x_2}{c_2} - 1. \end{cases} \tag{17}$$

Систему (15) можно также свести к неавтономной системе вида

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dx_2} = \frac{x_1}{x_2}, \\ \frac{x_3}{x_2} = \frac{x_3+1}{x_2}. \end{cases} \tag{18}$$

Система (18) легко решается, и, очевидно, общее решение этой системы запишется в виде (17).

Таким образом, интегральные кривые неавтономной системы (18) являются фазовыми траекториями автономной системы (16).